DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

– OPTION M –

(temps accordé : 3 heures)

Correction [1]

Une base de $\mathbb{R}^n$ étant fixée, on considère l'espace vectoriel $\mathscr{L}$ des matrices carrées (n,n) à coefficients réels représentant les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.
On distingue dans $\mathscr{L}$ les deux matrices suivantes :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de termes respectifs $s_{ij} = 1$ si et seulement si $j = i-1$ et $t_{ij} = 1$ si et seulement si $j = i-1$ ou $i = 1$ et $j = n$.

Première partie

1.

$$SX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, S^2X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2} \end{pmatrix}$$

et pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$

$$S^pX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-p} \end{pmatrix}.$$

x_1 se trouve sur la $p+1$-ème ligne.

De même, pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$, on obtient $T^pX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-p-2} \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-p+1} \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-p} \end{pmatrix}$. x_1 se trouve sur la $p+1$-ème ligne.

Pour $p \in [\![1, n-1]\!]$, on obtient :

$$S^p = \left(\begin{array}{c|c} O_{p,n-p} & O_{p,p} \\ \hline I_{n-p} & O_{n-p,p} \end{array} \right), \quad T^p = \left(\begin{array}{c|c} O_{p,n-p} & I_p \\ \hline I_{n-p} & O_{n-p,p} \end{array} \right)$$

où $O_{l,k}$ désigne la matrice nulle à l lignes et k colonnes. Pour $p \geq n$ on obtient $S^p = 0$ et $T^p = T^r$ où r est reste de la division euclidienne de p par n.

1. Mohamed TARQI, CPGE DÉNITRA MAROC E-mail : medtarqi@yahoo.fr `https://WWW.alkendy.ma`

2. Soit $p \in \mathbb{N}$ et r le reste de division euclidenne de p par n, alors :

$$ {}^tT^pT^p = {}^tT^rT^r = \left(\begin{array}{c|c} O_{r,n-r} & I_r \\ \hline I_{n-r} & O_{n-r,r} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} O_{n-r,r} & I_{n-r} \\ \hline I_r & O_{r,n-r} \end{array}\right) = I_n. $$

Donc T^p est orthogonale.

On a $S^n = 0$, $T^n = I_n$ et $T^p = T^r = \left(\begin{array}{c|c} O_{r,n-r} & I_r \\ \hline I_{n-r} & O_{n-r,r} \end{array}\right) = S^r + {}^t(S^{n-r})$.

3. Comme $S^p = 0$ pour $p \geq n$ et $T^p = T^r$ où r le reste de la division euclidienne de p par n, alors $\mathscr{S} = \mathrm{Vect}(I_n, S, S^2, ..., S^{n-1})$ et $\mathscr{T} = \mathrm{Vect}(I_n, T, T^2, ..., T^{n-1})$.

Vérifions que les deux familles $(I_n, S, S^2, ..., S^{n-1})$ et $(I_n, T, T^2, ..., T^{n-1})$ sont libres. En effet, soit $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p S^p = 0$, on obtient donc la matrice nulle suivante :

$$ \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & & \alpha_1 & \alpha_0 \end{pmatrix} $$

D'où $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_{n-1} = 0$.

De si $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p T^p = 0$, alors

$$ \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots & \alpha_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & & \alpha_1 & \alpha_0 \end{pmatrix} $$

et donc $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_{n-1} = 0$.

On en déduit que $\dim \mathscr{S} = \dim \mathscr{T} = n$.

Soit $A \in \mathscr{S} \cap \mathscr{T}$, donc il existe des nombres réels $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, \beta_0, \beta_1, ..., \beta_{n-1}$ tels que

$$ A = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p S^p = \sum_{p=0}^{n-1} \beta_p T^p. $$

Donc, par comparaison des coefficients des deux matrices, on obtient $\alpha_0 = \beta_0$ et $\alpha_p = \beta_p = 0$ pour $p \in [\![1, n-1]\!]$. On en déduit que $\mathscr{S} \cap \mathscr{T} = \mathrm{Vect}(I_n)$.

4. Si $1 \leq p \leq n-1$, la matrice S^p n'est pas inversible, car par exemple $\mathrm{rg}(S^p) = n - p < n$ et aussi n'est pas diagonalisable puisque 0 est l'unique valeur propre de S^p et $\mathrm{rg}(S^p) < n$.

Si $p \geq n$, S^p est nulle.

Deuxième partie

Si $A, B \in \mathscr{L}$, on définit $(A|B) = \dfrac{1}{n} \operatorname{tr}\left(A{}^tB\right)$.

1. On a $(.|.) : \mathscr{L} \times \mathscr{L} \to \mathbb{R}$. La linéarité à gauche provient de la linéarité de la transposée et de la trace. Puisque pour tout $M \in \mathscr{L}$, $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}({}^tM)$, la symétrie s'obtient aussi facilement et implique la bilinéarité. Enfin, pour tout $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{L}$, on a $(A|A) = \dfrac{1}{n} \mathrm{tr}(A{}^tA) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 \geq 0$ et il y a égalité si et seulement si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = 0$, ce qui équivaut a $A = 0$. La forme $(.|.)$ est donc définie positive. Ainsi, elle définit bien un produit scalaire sur $\mathscr{L}$.

2. Si $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ et $B=(b_{ij})_{1\le i,j\le n}$, alors $(A|B)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$. Ainsi, d'après les expressions de S^p et de S^q, $(S^p|S^q)=0$ si $p\neq q$ et $(S^p|S^p)=\|S^p\|^2=\dfrac{1}{n}(n-p)=1-\dfrac{p}{n}$.

Donc la famille $\left(\left(\dfrac{n}{n-p}\right)S^p\right)_{0\le p\le n-1}$ est une base orthonormée du sous-espace $\mathscr{S}$.

3. Il est clair que $(T^p|T^q)=0$ si $p\neq q$ et $(T^p|T^p)=1$, donc les matrices $0\le p\le n-1$, constituent une base orthonormée du sous-espace $\mathscr{T}$.

4. D'après la question 2 de la première partie, $T^q=S^q+{}^tS^{n-q}$, donc $(S^p|T^q)=(S^p|S^q)+(S^p|{}^tS^{n-q})=(S^p|S^q)$.

Soit $\sigma=\displaystyle\sum_{q=0}^{n-1}\alpha_qS^q\in\mathscr{S}$, alors :

$$(T^p-S^p|\sigma)=\sum_{q=0}^{n-1}\alpha_q(T^p-S^p|S^q)=\sum_{q=0}^{n-1}\alpha_q\left[(T^p|S^q)-S^p|S^q)\right]=\sum_{q=0}^{n-1}\alpha_q\left[(S^p|S^q)-S^p|S^q)\right]=0$$

On en déduit que T^p-S^p est orthogonale à $\mathscr{S}$.

Soit $\sigma^{**}=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\beta_iS^i\in\mathscr{S}$ tel que $(T^p-\sigma^{**}|\sigma)=0$, en particulier $(T^p-\sigma^{**}|S^j)=0$ pour tout $j\in[\![0,n-1]\!]$.

Mais

$$(T^p-\sigma^{**}|S^j)=(T^p-\sum_{i=0}^{n-1}\beta_iS^i|S^j)=(T^p|S^j)-\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i(S^i|S^j)=(S^p|S^j)-\beta_j(S^j|S^j)$$

D'où $\beta_j=\dfrac{(S^p|S^j)}{\|S^j\|^2}=0$ si $j\neq p$ et $\beta_p=1$ et par suite $\sigma^{**}=S^p$. Ainsi S^p est l'unique élément de $\mathscr{S}$ ayant la propriété de rendre T^p-S^p orthogonale à tout $\sigma\in\mathscr{S}$.

5. Posons $\tau^*=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_iT^i\in\mathscr{T}$. Cherchons $\sigma^*=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\beta_jS^j$ tel que $(\tau^*-\sigma^*|S^p)=0$ pour tout $p\in[\![0,n-1]\!]$.

Donc nécessairement $\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_iT^i|S^p\right)-\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\beta_jS^j|S^p\right)=0$ ou encore $\alpha_p(S^p|S^p)-\beta_p(S^p|S^p)=0$, d'où $\beta_p=\alpha_p$.

Inversement l'élément $\sigma^*=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_jS^j$ convient.

Pour tout $\sigma\in\mathscr{S}$, on a $(\sigma|\tau^*)=(\sigma|\tau^*-\sigma^*)+(\sigma|\sigma^*)=(\sigma|\sigma^*)$, d'où :

$$\frac{(\sigma|\tau^*)}{\|\sigma\|.\|\tau^*\|}=\frac{(\sigma|\sigma^*)}{\|\sigma\|.\|\tau^*\|}=\frac{\|\sigma^*\|}{\|\tau^*\|}\frac{(\sigma|\sigma^*)}{\|\sigma\|.\|\sigma^*\|}.$$

Ainsi

$$\sup_{\sigma\in\mathscr{S}}\frac{(\sigma|\tau^*)}{\|\sigma\|.\|\tau^*\|}=\frac{\|\sigma^*\|}{\|\tau^*\|}\sup_{\sigma\in\mathscr{S}}\frac{(\sigma|\sigma^*)}{\|\sigma\|.\|\sigma^*\|}.$$

Or, d'après l'inégalité de Schwartz, la quantité $\dfrac{(\sigma|\sigma^*)}{\|\sigma\|.\|\sigma^*\|}$ est maximale si et seulement si σ et σ^* sont liés, en particulier si $\sigma=\sigma^*$.

D'où

$$\sup_{\sigma\in\mathscr{S}}\frac{(\sigma|\tau^*)}{\|\sigma\|.\|\tau^*\|}=\frac{\|\sigma^*\|}{\|\tau^*\|}.$$

Troisième Partie

1. On a $\|S^pT^q\|^2=(S^pT^q|S^pT^q)=\dfrac{1}{n}\operatorname{tr}\left(S^pT^{pt}(S^pT^q)\right)=\dfrac{1}{n}\operatorname{tr}\left(S^pT^{pt}T^{pt}S^q\right)=\dfrac{1}{n}\operatorname{tr}\left(S^{pt}S^p\right)=\|S^p\|^2$.

De même, $\|T^qS^p\|=\|S^p\|$.

2. On remarque T est inversible, donc si $\sigma T = 0$, alors $0 = \sigma T T^{-1} = \sigma$.

3. Soit $e \in \mathscr{E}$ fixé. Cherchons $\tau = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i T^i \in \mathscr{T}$ tel que $e - \tau$ soit orthogonal à tout élément de $\mathscr{T}$. En particulier, $(e - \tau | T^j) = 0$ pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, donc $(e|T^j) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (T^i|T^j) =$ et par suite $\alpha_j = (e|T^j)$. Donc l'élément $\tau = \sum_{j=0}^{n-1} (e|T^j) T^j$ convient.

• • • • • • • • • •